Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
M.Sc. Thor Wittich

Wintersemester 2021/22
08.11.2021

Lineare Algebra I
Blatt 4

Auf diesem Blatt bezeichnet $S_\square$ die Symmetriegruppe eines Quadrats; siehe Aufgabe 3 auf Blatt 3 oder Beispiel 2.5 der Vorlesung.

1 | Ecce homo I

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Gruppenhomomorphismen? Bestimmen Sie bei den Gruppenhomomorphismen jeweils den Kern und das Bild!

(a) $(\mathbb{N},+) \to (\mathbb{Z},+)$, $x \mapsto -x$

(b) $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$, $x \mapsto x-2$

(c) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to (\{+1,-1\},\cdot)$, $[x] \mapsto (-1)^x$

(d) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z},+)$, $[x] \mapsto x$

(e) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot) \to (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $x \mapsto x^2$

(f) $(\{+1,-1\},\cdot) \to S_\square$, $1 \mapsto d_0$, $-1 \mapsto s_x$

(g) $(\{+1,-1\},\cdot) \to S_\square$, $1 \mapsto d_0$, $-1 \mapsto d_1$

2 | Synchronknüpfen

Das kartesische Produkt $G \times H$ zweier Gruppen $(G,\cdot)$ und $(H,\circ)$ ist mittels der „elementweisen Verknüpfung“

$$(g,h)\odot(g',h') := (g\cdot g', h\circ h')$$

wieder eine Gruppe. Ferner sind die Projektionen $(G,\cdot) \twoheadleftarrow (G\times H,\odot) \twoheadrightarrow (H,\circ)$ Homomorphismen.

Sowohl G als auch H lassen sich als Untergruppen von $(G\times H,\odot)$ auffassen: es gibt kanonische Monomorphismen $(G,\cdot) \hookrightarrow (G\times H,\odot) \hookleftarrow (H,\circ)$. Diese Untergruppen – also genauer die Bilder dieser Monomorphismen – sind normal. Was sind die jeweiligen Quotientengruppen?

3 | Vollversammlung ★

Jede Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$ ist von der Form $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z\in\mathbb{Z}\}$ für ein $n\in\mathbb{N}_0$. Ist der Schnitt $n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}$ für beliebige $m,n\in\mathbb{N}_0$ wieder eine Untergruppe? Wenn ja, welche?

4 | Symmetrismus ★

Welche der folgenden Teilmengen von $S_\square$ sind Untergruppen? Welche der Untergruppen sind normal? Wie lässt sich gegebenenfalls die Quotientengruppe beschreiben?

$$\begin{aligned} A &:= \{d_0, s_x\} \\ B &:= \{d_0, s_x, s_y\} \\ C &:= \{d_0, d_1, d_2, d_3\} \end{aligned}$$

Es gibt einen Monomorphismus $S_\square \hookrightarrow S_4$. Ist das Bild von $S_\square$ in S_4 eine normale Untergruppe?

Abgabefrist: 17.11.2021, 10:15 Uhr.